OPCIÓN A

A.1. Se consideran las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{a} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}$ **y** $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1}\end{pmatrix}$

a) **Calcule los valores del parámetro real $\boldsymbol{a}$ para los cuales la matriz $\boldsymbol{A}$ tiene inversa.**

Para averiguar cuándo la matriz dada tiene inversa, se debe calcular $|A|=0$; y, sobre eso, despejar el parámetro a:

$$|A|=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{a} & -\mathbf{1}\end{vmatrix}=-2a+a-1=-a-1=0\rightarrow a=-1$$

Solución:

- **Caso 1: si $\boldsymbol{a}\neq-\mathbf{1}\rightarrow|\boldsymbol{A}|\neq\mathbf{0}\rightarrow\exists\boldsymbol{A}^{-1}$**
- **Caso 2: si $\boldsymbol{a}=-\mathbf{1}\rightarrow|\boldsymbol{A}|=\mathbf{0}\rightarrow\nexists\boldsymbol{A}^{-1}$**

b) **Para $\boldsymbol{a}$=2 calcule, si existe, la matriz $\boldsymbol{X}$ que satisface $\boldsymbol{AX}$=$\boldsymbol{B}$.**

Para resolver la ecuación matricial dada, puede plantearse asignando valores paramétricos a la matriz X:

$$X=\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}$$

Sobre esto, se reemplazan las matrices en la ecuación:

$$AX=B\rightarrow\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{2} & -\mathbf{1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ -x+2y \\ -2y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ -\mathbf{1}\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases} 2x+y+z=-2 \\ -x+2y=1\rightarrow[\boldsymbol{x}=\mathbf{2}\boldsymbol{y}-\mathbf{1}] \\ -2y-z=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases} 2[2y-1]+y+z=-2 \\ -2y-z=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases} 5y+z=0 \\ -2y-z=-1\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases} 5y+z=0\rightarrow[\boldsymbol{z}=-\mathbf{5}\boldsymbol{y}] \\ -2y-z=-1\end{cases}\rightarrow-2y-[-5y]=-1\rightarrow3y=-1\rightarrow\begin{cases} x=-\dfrac{5}{3} \\ y=-\dfrac{1}{3} \\ z=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

Solución: $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(-\mathbf{5}/\mathbf{3}\,;-\mathbf{1}/\mathbf{3};\mathbf{5}/\mathbf{3})$

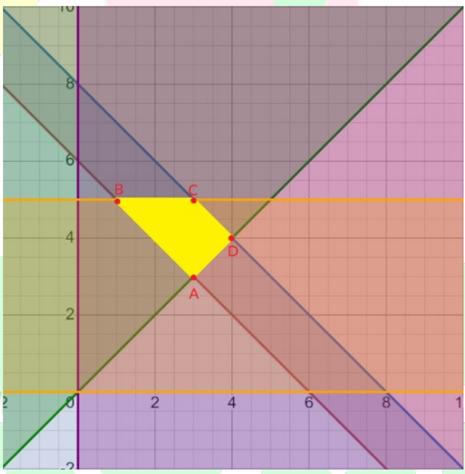
A.2. **Una empresa tecnológica se plantea la producción y lanzamiento de dos nuevos cables de fibra óptica, el modelo A2020 y el modelo B2020. El coste de producir un metro del modelo A2020 es igual a 2 euros, mientras que el coste de producir un metro del modelo B2020 es igual a 0,5 euros. Para realizar el lanzamiento comercial se necesitan al menos 6000 metros de cable, aunque del modelo B2020 no podrán fabricarse más de 5000 metros; y, debido al coste de producción, no es posible fabricar más de 8000 metros entre los dos modelos. Además, se desea fabricar una cantidad de metros del modelo B2020 mayor o igual que la de metros del modelo A2020.**

a) **Represente la región factible y calcule las coordenadas de sus vértices.**

En primer lugar, es necesario plantear el problema, teniendo en cuenta cuál es cada variable (x: $A2020$, $y = B2020$):

$$Min\ C(x,y) = 2x + 0'5y$$
$$s.a.:$$
$$x + y \geq 6$$
$$x + y \leq 8$$
$$y \geq x$$
$$x \geq 0$$
$$0 \leq y \leq 5$$

Solución: la región factible será:



b) **Determine el número de metros que deben producirse de cada uno de los modelos para minimizar el coste.**

Ya conocida la región factible, lo siguiente es determinar los vértices de la misma:

$$A = (1{,}5) \qquad B = (3{,}5) \qquad C = (3{,}3) \qquad D = (4{,}4)$$

Finalmente, conocidas cas coordenadas, se reemplaza cada una en la función objetivo. La solución que satisfará el objetivo del problema (minimizar el coste) será aquella que dé el menor resultado:

$$\boldsymbol{C_A(1,5) = 2 \cdot 1 + 0,5 \cdot 5 = 4,5}$$
$$C_B(3{,}5) = 2 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 5 = 8{,}5$$
$$C_C(3{,}3) = 2 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 3 = 7{,}5$$
$$C_D(4{,}4) = 2 \cdot 4 + 0{,}5 \cdot 4 = 10$$

Solución: El coste mínimo se obtendrá produciendo 1000 metros del modelo A2020 y 5000 metros del modelo B2020, lográndose un coste de 4,5€

A.3. Dada la función real de variable real definida por:

$$\boldsymbol{f(x)=\begin{cases} x^2-x-1\ si\ x\leq 3 \\ \dfrac{3a}{x}\ si\ x>3 \end{cases}}$$

a) **Determine el valor del parámetro real $\boldsymbol{a}$ para que la función $\boldsymbol{f(x)}$ sea continua en todo su dominio. ¿Para ese valor de $\boldsymbol{a}$, es $\boldsymbol{f(x)}$ derivable?**

Para comprobar la continuidad de la función es necesario forzar que se cumpla la definición de continuidad:

$$f(3)=\lim_{x\to 3} f(x) \to 5=a$$

Solución: Para que la función sea continua, $\boldsymbol{a}$ deberá valer 5.

Para comprobar si la función es derivable en $a=5$, debe comprobarse la definición de derivabilidad. En primer lugar, se calcula la derivada de la función:

$$f'(x)=\begin{cases} \boldsymbol{2x-1\ si\ x\leq 3} \\ \boldsymbol{-\dfrac{15}{x^2}\ si\ x>3} \end{cases}$$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3^-} f'(x)=\lim_{x\to 3^+} f'(x) \to 5=5\neq -\frac{15}{9}$$

Solución: Dado que los límites laterales no coinciden, la función no es derivable.

b) **Para $\boldsymbol{a=1}$, calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $\boldsymbol{x=1}$:**

En primer lugar, se calcula el valor de y: $f(1)=-1\to \boldsymbol{y=-1}$

A continuación, se calcula el valor de m: $\begin{cases} f'(x)=2x-1 \\ x=1 \end{cases} \to f'(1)=1\to \boldsymbol{m=1}$

Seguidamente, se reemplazan los valores de x, y, y m en la ecuación general de la recta:

$$y-y_0=m(x-x_0)\to \boldsymbol{y+1=x-1}$$

Por último, a partir de la ecuación general de la recta, se crea la ecuación de la recta tangente:

$$y+1=x-1\to \boldsymbol{y=-x-2}$$

Solución: La ecuación de la recta tangente será $\boldsymbol{y=-x-2}$

A.4. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos sucesos de un experimento aleatorio, tales que:

$$\boldsymbol{P(A)=0'5; P(\overline{B})=0'8; y\ P(\overline{A}\cup\overline{B})=0'9}$$

a) **Estudie si los sucesos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son independientes.**

Para que los sucesos sean independientes, es necesario que se cumpla que $P(B|A)=P(B)$:

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)\to P(A\cap B)=1-P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-0{,}9=0{,}1$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(A)\to P(A)=\frac{0'1}{0'5}=0'2\to \boldsymbol{P(B|A)=0'2=P(B)}$$

Solución: Como se cumple que $\boldsymbol{P(B|A)=0'2=P(B)}$, los sucesos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son independientes.

b) Calcule $P(\bar{A}|\bar{B})$.

Para calcular $P(\bar{A}|\bar{B})$ se desarrollará de la siguiente manera:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{0'8} = \frac{1 - 0'6}{0'8} = 0'5$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = 0'5 + 0'2 - 0'1 = 0'6$$

Solución: $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0'6$

A.5. El peso de los huevos producidos en una granja avícola se puede aproximar por una variable aleatoria de distribución normal de media μ gramos y desviación típica $\sigma = 8$ gramos.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 huevos, obteniéndose una media muestral de 60 gramos. Determine un intervalo de confianza del 95% para μ.

El intervalo de confianza para la media se planteará de la siguiente manera:

$$IC_{1-\alpha}(\bar{x}) = \left(\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow IC_{1-0'95}(\bar{x}) = \left(60 \pm 1'96 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}\right) = (60 \pm 3'51) = (56'49; 63'51)$$

Solución: El peso medio está comprendido entre 56'49 gramos y 63'51 gramos, con una confianza del 95%.

NOTA: Para averiguar el valor de $z_{\alpha/2}$ se realiza la siguiente secuencia:

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

b) Suponga que $\mu = 59$ gramos. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de 10 huevos, la media muestral, $\bar{X}$, esté comprendida entre 57 y 61 gramos.

Para averiguar la probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 57 y 61 gramos se deberá tipificar la media de la variable:

$$P(57 \leq \bar{X} \leq 61) = P(\bar{X} \leq 61) - P(\bar{X} \leq 57) = P\left(z \leq \frac{61 - 59}{\frac{8}{\sqrt{10}}}\right) - \left(z \leq \frac{57 - 59}{\frac{8}{\sqrt{10}}}\right) =$$

$$= P(z \leq 0'79) - P(z \leq -0'79) = P(z \leq 0'79) - P(z \geq 0'79) =$$

$$= P(z \leq 0'79) - [1 - P(z \leq 0'79)] = 0'7852 - (1 - 0'7852) = 0'5704$$

Solución: La probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 57 gramos y 61 gramos es de un 57'04%.

OPCIÓN B

B.1. Se considera el sistema de ecuaciones dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x + 2ay + z = 0 \\ -x - ay = 1 \\ -y - z = -a \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro real a.

Para discutir el sistema, se comienza primeramente calculando el determinante de la matriz A:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ -1 & -a & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = a + 1 - 2a = -a + 1 = 0 \rightarrow a = 1$$

Solución:

Caso 1: $a \neq 1$

$$\begin{cases} |A| \neq 0 \rightarrow RgA = 3 \\ |A^*| \neq 0 \rightarrow RgA^* = 3 \end{cases} \rightarrow RgA = RgA^* = nº\ incógnitas \rightarrow SCD$$

Caso 2: $a = 1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} |A| = 0 \rightarrow RgA < 3 \rightarrow |M_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow RgA = 2 \\ |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow RgA^* < 3 \rightarrow |M_{12}| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow RgA^* = 2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow RgA = RgA^* < nº\ incógnitas \rightarrow SCI$$

b) Resuelva el sistema para $a = 3$.

Para $a = 3$, el sistema de ecuaciones quedará de la siguiente manera:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Sobre esto, se resolverá utilizando el método de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2}{-2} = -1 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Solución: $(x, y, z) = (2, -1, 4)$

B.2. Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2}$

a) **Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.**

Dominio:

Para estudiar el dominio, y considerando que la función es un cociente, es necesario verificar qué valores de x anulan al denominador:

$$(x-1)^2 = 0 \to x-1=0 \to x=1$$

Solución: $\boldsymbol{Domf(x) = \mathbb{R} - \{1\}}$

Asíntotas:

AV:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$$

Solución: la función tiene asíntotas verticales en $x = 1$

AH:

Solución: $\nexists AH$ porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, lo que implica que, cuando se calcule el límite en $\pm\infty$, siempre dará $\pm\infty$.

AO:

$$y = mx + n$$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2}{x^3-2x^2+x} = 1 \to m = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2}{(x-1)^2} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x^2}{x^2-2x+1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x^2-2x+1} = 0$$

Solución: $y = x$

b) **Determine sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.**

Para determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, se calcularán los puntos críticos de la función:

$$f'(x) = \frac{(3x^2-4x)(x-1)^2 - (x^3-2x^2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{x(x^2-3x+4)}{(x-1)^3} = 0 \to$$

$$\to x(x^2-3x+4) = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x^2-3x+4 \neq 0 \end{cases}$$

Ya conocidos los puntos críticos, y junto con los valores del dominio, se verán, en la primera derivada, si la función crece ($f'(x) > 0$) o decrece ($f'(x) < 0$).

$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$
Creciente	Decreciente	Creciente

Solución: la función es creciente en los tramos $(-\infty, 0)$ y $(1, \infty)$, y decreciente en el tramo $(0, 1)$

B.3. **Se sabe que la derivada de una función real $f(x)$ de variable real es:**

$$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 + 8x}$$

a) **Determine la expresión de $f(x)$ sabiendo que $f(1) = 11$.**

$$\int (3x^2 + 8x)dx = x^3 + 4x^2 + c = f(x)$$

$$\begin{cases} f(1) = 11 \\ f(1) = 1 + 4 + c = 5 + c \end{cases} \rightarrow 5 + c = 11 \rightarrow c = 6$$

Solución: la expresión de $f(x)$ es $f(x) = x^3 + 4x^2 + 6$

b) **Determine los máximos y mínimos de $f(x)$, su los hubiera.**

Para determinar si la función tiene máximos o mínimos, primero se buscarán los puntos críticos de la función obteniendo los valores de x al igualar primera derivada a cero:

$$\boldsymbol{f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 8x = 0 \rightarrow x(3x + 8) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{-8}{3} \end{cases}}$$

A continuación, se calcula la segunda derivada de la función; y, sobre ésta, se reemplazarán los puntos críticos obtenidos en el cálculo anterior:

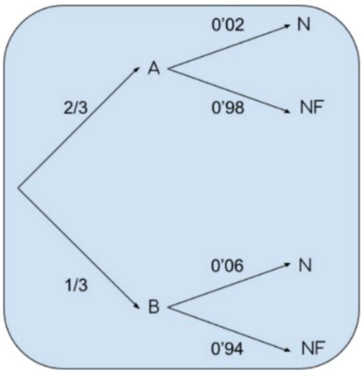
$$f''(x) = 6x + 8 \rightarrow \begin{cases} f''(0) = 8 > 0 \rightarrow Mínimo \\ f''\left(\frac{-8}{3}\right) = -8 < 0 \rightarrow Máximo \end{cases}$$

Solución: la función tiene un mínimo en $x = 0$, y un máximo en $x = \frac{-8}{3}$

B.4. **Un colegio tiene alumnos matriculados que residen en dos municipios distintos, A y B, siendo el número de alumnos matriculados residentes en el municipio A el doble de los del municipio B. Se sabe que la probabilidad de fracaso escolar, si se habita en el municipio A, es de 0'02; mientras que esa probabilidad, si se habita en el municipio B, es de 0'06. Calcule la probabilidad de que un alumno de dicho colegio, elegido al azar:**

En primer lugar, es necesario plantear la información que se ha dado optando por un esquema de diagrama de árbol:

A: ser residente en el municipio A	F: sufrir fracaso escolar
B: ser residente en el municipio B	NF: No sufrir fracaso escolar



a) No sufra fracaso escolar.

$$P(NF) = P(A \cap NF) + P(B \cap NF) = P(A) \cdot P\left(\frac{NF}{A}\right) + P(B) \cdot P\left(\frac{NF}{B}\right) = \frac{2}{3} \cdot 0'98 + \frac{1}{3} \cdot 0'94 = 0'967$$

Solución: La probabilidad de no sufrir fracaso escolar es de un 96'7%

b) Sea del municipio A, si se sabe que ha sufrido fracaso escolar.

$$P(A/F) = \frac{P(A \cap F)}{P(F)} = \frac{P(A) \cdot P(F|A)}{1 - P(NF)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0'02}{1 - 0'967} = 0'404$$

Solución: La probabilidad de que, sabiendo que alguien ha sufrido fracaso escolar, sea del municipio A, es de un 40'4%

B.5. El tiempo necesario para cumplimentar un test psicotécnico se puede aproximar por una variable aleatorio con distribución normal de media μ minutos, y desviación típica $\sigma = 3$ minutos.

a) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de μ sea menor de 1 minuto, con un nivel de confianza del 95%.

Para calcular el tamaño de la muestra se utilizará la fórmula del error de estimación, despejando el valor de n:

$$e = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow n = \left(\frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{e}\right)^2 \rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 3}{1}\right)^2 = 34'5744 \cong 35$$

NOTA: para calcular el valor de $z_{\alpha/2}$ se obtiene de la siguiente manera:

$$1 - \alpha = 0'95 \rightarrow \alpha = 0'05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0'025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0'975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1'96$$

Solución: el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 35 pruebas.

b) Suponga que $\mu = 32$ minutos. Calcule la probabilidad de que, al tomar una muestra aleatoria simple de tamaño $n = 16$ pruebas, el tiempo medio empleado en su realización, $\bar{X}$, sea menor que 30'5 minutos.

Para calcular la probabilidad de que la media muestral sea menor de 30'5 minutos ($\bar{x} < 30'5$), se recurrirá a la tipificación de la media de la variable:

$$P(\bar{x} < k) = P\left(z < \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(z < \frac{30'5 - 32}{\frac{3}{\sqrt{16}}}\right) = P(z < -2) = P(z > 2) =$$

$$= 1 - P(z < 2) = 1 - 0{,}9772 = 0'0228$$

Solución: la probabilidad de que la media sea menor de 30'5 minutos es de un 2'28%