1. A.1) (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de los parámetros reales a y b para los que A = A^{-1}

b) Para a = b = 2, calcule la matriz inversa de A

Solución

a) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

Si $A = A^{-1}$, entonces $A^2 = A \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & 2a \\ 0 & b^2 & 0 \\ 2a & 0 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $a^2 + 1 = 1$ y $2a = 0$, se tiene que a=0.

$b^2 = 1$, entonces $b = \pm 1$.

b) Si $a = b = 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $|A| = 6$.

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = Adj(A^t)$.

$$A^t = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A^t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0{,}5 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

A.2) (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2 - 1}$$

a) Determine el dominio de f(x) y calcule sus asíntotas

b) Calcule la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0

Solución

a) El dominio de f es el conjunto de puntos de $\mathbb{R}$ para los cuales no se anula el denominador de $f(x)$: $Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$.

- Asíntotas horizontales: no tiene.
- Asíntotas verticales: $x = 1$ y $x = -1$
- Asíntotas oblicuas: $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+4}{x^3-x} = 1$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3+4-x^3+x}{x^2-1}\right) = 0$$

La asíntotas oblicuas es: $y = mx + n = x$

b) $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-1}$ y $f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-(x^3+4)2x}{(x^2-1)^2}$

$f(0) = -4$ y $f'(0) = 0$

Ecuación de la recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4$$

A.3) (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - a\times & si \;\; x \le 1 \\ \ln x & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

denotando por ln la función logaritmo neperiano

a) Determine para qué valores de a$\epsilon\mathbb{R}$ la función f(x) es continua en R

b) Para a = 1, Halle el área de la región acotada delimitada por la función f(x), el eje de abscisas y las rectas x = -1 y x = 0

Solución

a) $$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & \text{si } x \le 1, \\ Ln(x) & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

En $x \neq 1$, f es continua porque las funciones lo son.

En $x = 1$, f es continua sii $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} Ln(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 - ax) = 1 - a$$

$$f(1) = 1 - a$$

La función es continua si $a = 1$.

b) $\int_{-1}^{0} (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{6}$

A.4) (Calificación máxima: 2 puntos)

El 60% de los empleados de una multinacional teletrabaja desde que se declaró la situación de emergencia sanitaria por Covid-19. De estos, el 30% padece trastornos del sueño, mientras que este porcentaje se eleva al 80% para aquellos empleados que no teletrabajan. Seleccionado un empleado al azar, calcule la probabilidad de que:

a) No tenga trastornos del sueño y teletrabaje
b) No teletrabaje, sabiendo que no tiene trastornos del sueño

Solución

Sean los sucesos T="Teletrabajar" S="Tener transtornos de sueño"

$P(T) = 0{,}6$ y $P(\bar{T}) = 0{,}4$
$P(S|T) = 0{,}3$ y $P(\bar{S}|T) = 0{,}7$
$P(S|\bar{T}) = 0{,}8$ y $P(\bar{S}|\bar{T}) = 0{,}2$

a) $P(\bar{S} \cap T) = P(T) \cdot P(\bar{S}|T) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42.$

b) $P(S) = P(T) \cdot P(S|T) + P(\bar{T}) \cdot P(S|\bar{T}) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}4 \cdot 0{,}8 = 0{,}5$ y $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0{,}5$

$$P(\bar{T}/\bar{S}) = \frac{P(\bar{T} \cap \bar{S})}{P(\bar{S})} = \frac{P(\bar{T}) \cdot P(\bar{S}|\bar{T})}{P(\bar{S})} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}2}{0{,}5} = 0{,}16.$$

A.5) (Calificación máxima: 2 puntos)
Se quiere evaluar el uso de las redes sociales por parte de los menores de 14 años
a) Se toma una muestra de 500 menores de 14 años, de los cuales 320 tienen cuenta en alguna red social. Calcule el intervalo de confianza al 96% para estimar la proporción de menores de 14 años que tienen cuenta en alguna red social.
b) Suponiendo que la proporción poblacional es P = 0,5; determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de menores de 14 años para garantizar que, con una confianza del 95%, el margen de error en la estimación no supere el 5%.

Solución

a) $n = 500; \quad a = 320; \quad p = \frac{a}{n} = \frac{320}{500} = 0{,}64; \;\; q = 1 - p = 0{,}36$

$1 - \alpha = 0{,}96; z_{\alpha/2} = 2{,}055.$

$$I = \left(p - \sqrt{\frac{pq}{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, p + \sqrt{\frac{pq}{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \left(0{,}64 - \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{500}} 2{,}055, 0{,}64 + \sqrt{\frac{0{,}64 \cdot 0{,}36}{500}} 2{,}055\right).$$

$$I = (0{,}5959, 0{,}6841)$$

b) $P = 0{,}5; \quad E \leq 0{,}05; \quad 1 - \alpha = 0{,}95; \quad z_{\alpha/2} = 1{,}96$

$$E = \sqrt{\frac{PQ}{n}} z_{\alpha/2} \leq 0{,}05; \qquad n \geq \frac{PQ}{E^2}\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 = \left(\frac{0{,}5}{0{,}05} 1{,}96\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{PQ}{n}} z_{\alpha/2} \leq 0{,}05; \qquad \frac{6 \cdot 1{,}96}{1{,}5} \leq \sqrt{n}; \qquad n \geq \left(\frac{6 \cdot 1{,}96}{1{,}5}\right)^2 = 384{,}16$$

El tamaño muestral mínimo debe ser de 385 menores de 14 años.

B.1) (Calificación máxima: 2 puntos)
Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependientes del parámetro real a:
a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a
b) Resuelva el sistema para a = 1

Solución

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 1 & -1 & a^2 & | & 3 \\ 2 & -1 & 1 & | & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -2 & 1+a^2 & | & 4 \\ 0 & -3 & 3 & | & 6 \end{pmatrix}$

$|A| = 3a^2 - 3.$

Es compatible determinado si $3a^2 - 3 \neq 0,\ a \neq \pm 1.$

Es compatible indeterminado si $a = \pm 1$ porque $Rg(A) = 2 = Rg(A/B) < 3.$

b) Si $a = 1$,

$\left.\begin{matrix} x+y-z=-1 \\ x-y+z=3 \\ 2x-y+z=4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad z = y+2; \qquad x = -y+z-1 = -y+y+2-1 = 1$

Solución: $(1, y, y+2)$

B.2) (Calificación máxima: 2 puntos)

Un almacén de frutos secos tiene un saco de 50 kg de almendras y otros 25 kg de avellanas. Quiere mezclarlos para preparar bolsas mixtas para su venta. La cantidad de almendras de la mezcla ha de ser como mínimo 1,5 veces la cantidad de avellanas. Además, para que les sea rentable la preparación, deberá vender al menos 60 kg entre ambos tipos de frutos secos. Por otra parte, no puede vender más de 70 kg entre ambos. Represente la región factible. Calcule la cantidad de cada fruto seco que ha de contener la mezcla para obtener el máximo beneficio si 1 kg de almendras le deja un beneficio de 1€ y 1 kg de avellanas de 2€, y obtenga el beneficio que se obtiene con la venta de esta mezcla.

Solución

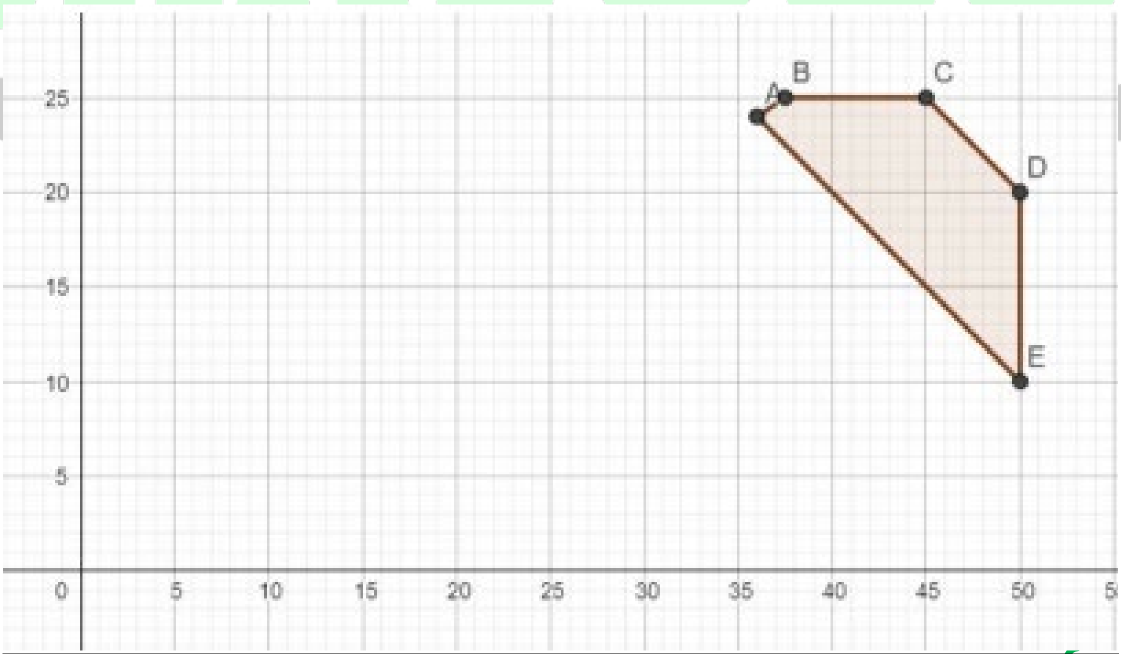
Sea x la variable que representa los kg. de almendras e y la variable que representa los kg. de avellanas. La región del plano viene definida por las restricciones:

$x \leq 50; \qquad y \leq 25; \qquad x \geq 1{,}5y; \qquad x + y \geq 60; \quad x + y \leq 70.$

Y la función objetivo es:

$$f(x,y) = x + 2y$$

La región S dibujada es



Está determinada por los vértices A=(36;24), B=(37,5;25), C=(45;25), D=(50;20) y E=(50;10).
La región es cerrada y acotada, para calcular el valor máximo de la función $f(x,y)$ se evalúa en los vértices de S:

$$f(36;24) = 36 + 2 \cdot 24 = 84$$
$$f(37{,}5;25) = 37{,}5 + 2 \cdot 25 = 87{,}5$$
$$f(45;25) = 45 + 2 \cdot 25 = 95$$
$$f(50;20) = 50 + 2 \cdot 20 = 90$$
$$f(50;20) = 50 + 2 \cdot 10 = 70$$

El punto de la región en el cuál se alcanza el máximo es C, siendo 95 el valor máximo alcanzado.
La mezcla contendrá 45 kg. de almendras y 25 kg. de avellanas, dejándole un beneficio de 95€

B.3) (Calificación máxima: 2 puntos)

Se considera la función real de variable real, definida $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x$

a) Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) y determina sus extremos relativos indicando si corresponden a máximos o mínimos.

b) Calcule

$$\int_1^2 e^{-x} f(x)\,dx$$

Solución

a) $f(x) = (x^2 - 3)e^x$

$f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = 0 \Leftrightarrow x = 1, \quad x = -3$

La función crece en $(-\infty, -3), (1, \infty)$ y decrece en $(-3,1)$

Hay un máximo en $x = -3$ y un mínimo $x = 1$

b) $\int_1^2 e^{-x} f(x)dx = \int_1^2 (x^2 - 3)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x\right]_1^2 = \frac{-2}{3}$

B.4) (Calificación máxima: 2 puntos)

se consideran los sucesos A y B de un experimento aleatorio tales que:

$$p(A) = 0{,}5 \qquad p(\bar{B}|A) = 0{,}4 \qquad p(A \cup B) = 0{,}9$$

a) Calcule $p(B|\bar{A})$

b) Determine si son dependientes o independientes los sucesos A y B. Justifique la respuesta

Solución

$$P(A) = 0{,}5 \qquad P(\bar{B}|A) = 0{,}4 \qquad P(A \cup B) = 0{,}9$$

a) $P(B|A) = 0{,}6$, entonces $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0{,}3$

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) = 0{,}9 - 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}7$$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A) = 0{,}7 - 0{,}3 = 0{,}4$

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}4}{0{,}5} = 0{,}8$$

b) Los sucesos A y B no son independientes puesto que $P(B \,/\, A) \neq P(B)$

B.5) (Calificación máxima: 2 puntos)

El consumo diario de pan de un estudiante de Secundaria sigue una distribución normal de media µ y desviación típica 20 gramos

a) Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 36. calcule la probabilidad de que la media muestral Ẋ no supere los 125 gramos sí µ = 120 gramos

b) Sabiendo que para una muestra aleatoria simple de 81 estudiantes de Secundaria se ha obtenido el intervalo de confianza (117,3444; 124,6556) para µ, determina el nivel de confianza con el que se obtuvo dicho intervalo.

Solución

X sigue una distribución $N(\mu, 20)$.

a) $n = 36 \qquad \bar{X} \equiv N\left(120; \frac{20}{\sqrt{36}}\right) = N(120; 3{,}33)$.

$P(\bar{X} \leq 125) = P\left(\frac{\bar{X}-120}{3{,}33} \leq \frac{125-120}{3{,}33}\right) = P(N(0{,}1) \leq 1{,}5) = 0{,}9332$.

b) $n = 81,\ I = (117{,}3444;\ 124{,}6556) 2E = 7{,}3112$.

$$3{,}6556 = E = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} = \frac{20}{9} z_{\alpha/2}.$$

$$z_{\alpha/2} = \frac{9 \cdot 3{,}6556}{20} = 1{,}645$$

El nivel de confianza es por tanto del 90%.
