INSTRUCCIONES Y CRITERIOS GENERALES DE CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos (1 punto cada apartado).

TIEMPO: 90 minutos

Pregunta A1- La distancia de la Tierra al Sol varía a lo largo de su órbita entre $1,52 \cdot 10^{11}\ m$ en su punto más alejado (afelio) y $1,47 \cdot 10^{11}\ m$ en el punto más próximo (perihelio).

a) Calcule el trabajo realizado por el campo gravitatorio del Sol sobre la Tierra en el tránsito del afelio al perihelio.

b) Si la energía mecánica de la Tierra en su órbita vale $-2,65 \cdot 10^{33}\ J$, ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza la Tierra en ella?

Datos: Constante de Gravitación Universal, $G = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\ m^2\ kg^{-2}}$; *Masa de la Tierra,* $M_T = 5,97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$; *Masa del Sol,* $M_S = 1,99 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$

a) Como el campo gravitatorio es conservativo, el trabajo realizado por el campo gravitatorio del Sol será equivalente la diferencia de la energía potencial entre el afelio y el perihelio:

$$W = -\Delta U(af \to per) = -GM_sM_T\left(\frac{1}{r_{af}} - \frac{1}{r_{per}}\right)$$

Como todos los datos están ya en unidades del SI tan sólo queda sustituir:

$$W = -6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \cdot \left(\frac{1}{1,52 \cdot 10^{11}} - \frac{1}{1,47 \cdot 10^{11}}\right) = +1,77 \cdot 10^{32}\ J$$

b) Como la energía mecánica es la suma de la potencial y la cinética, podemos obtener la energía cinética de la Tierra y de ahí la velocidad de su órbita. A su vez, de acuerdo con la 2ª Ley de Kepler, cuanto más cerca se encuentre del Sol más rápido orbitará la Tierra. Por ello, para calcular la velocidad máxima tenemos que calcular la velocidad en el perihelio. De esta forma, en los cálculos utilizaremos una distancia $r = r_{per}$:

$$E_M = U + E_c \to E_c = E_M - U = E_M + \frac{GM_sM_T}{r_{per}}$$

$$E_c = -2,65 \cdot 10^{33} + \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{1,47 \cdot 10^{11}} = 2,74 \cdot 10^{33}\ J$$

De manera que la velocidad máxima será:

$$E_c = \frac{1}{2} M_T v_{max}^2 \rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2E_c}{M_T}}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}74 \cdot 10^{33}}{5{,}97 \cdot 10^{24}}} = 3{,}03 \cdot 10^4 \ m/s$$

Pregunta A2- La expresión matemática de una onda transversal que se propaga en el sentido positivo del eje *x*, con una velocidad de propagación de $4/3\ m\ s^{-1}$, es: $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)$. Se sabe que en el instante *t* = 1 s el punto situado en *x* = 1 m tiene una aceleración de $-32\pi^2\ cm\ s^{-2}$ y un desplazamiento de +2 cm a lo largo de la dirección *y*. Si en el instante *t* = 0 s, el punto situado en *x* = 0 tiene el desplazamiento máximo de valor -2 cm, determine:
a) La frecuencia angular y el número de onda.
b) La amplitud y la fase inicial de la onda φ

a) Podemos hallar la aceleración de un punto de la onda derivando la función de onda con respecto al tiempo dos veces:

$$a(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\, cos(\omega t - kx + \varphi)$$

De esta forma, como conocemos la aceleración y la posición en x=1m y t=1s, sustituyendo en las expresiones de la aceleración y la posición:

$$a(1,1) = -\omega^2 A\, cos(\omega - k + \varphi)$$
$$y(1,1) = A\, cos(\omega - k + \varphi)$$

Entonces, si las dividimos:

$$\frac{a(1,1)}{y(1,1)} = \frac{-\omega^2 A\, cos(\omega - k + \varphi)}{A\, cos(\omega - k + \varphi)} = -\omega^2$$

Por ello, como sabemos que $a(1,1) = -32\pi^2\ cm/s^2$ y $y(1,1) = 2\ cm$,

$$\frac{a(1{,}1)}{y(1{,}1)} = \frac{-32\pi^2\ cm/s^2}{2\ cm} = -16\pi^2\ s^{-2} = -\omega^2$$

Por lo que la frecuencia angular será $\omega^2 = 16\pi^2\ s^{-2} \rightarrow \boldsymbol{\omega = 4\pi\ rad/s}$. Entonces, como $\omega = 2\pi\nu$, la frecuencia de la onda será $\nu = 2\ Hz$. Por otro lado, como la velocidad de propagación viene determinada por $v = \lambda \cdot \nu$, despejando la frecuencia podemos hallar la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \rightarrow \lambda = \frac{4/3}{2} = \frac{2}{3} m$$

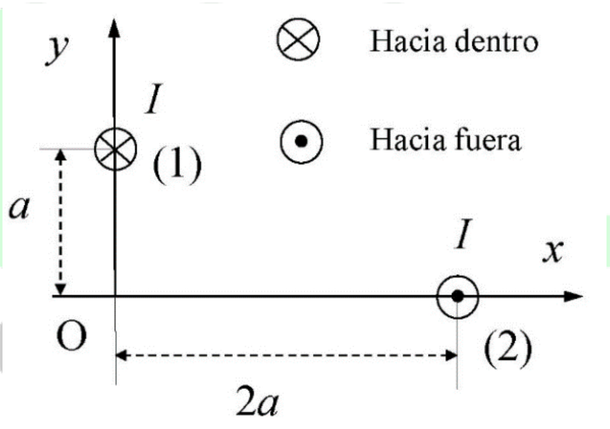
Finalmente, como $k = 2\pi/\lambda$, el número de onda será:

$$k = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi\ m^{-1}$$

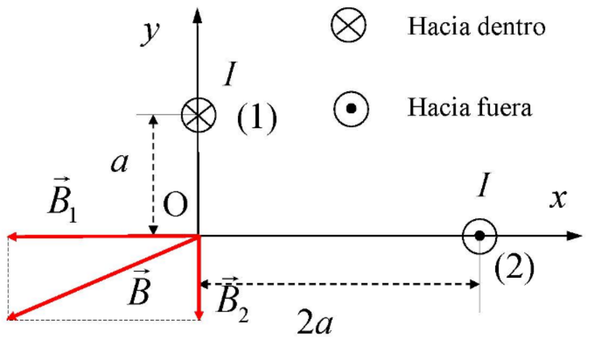
b) Como en x=0m y t=0s el desplazamiento es máximo y la función de onda en ese punto y en ese tiempo toma el valor $y(0{,}0) = A\cos(\varphi)$ podemos concluir que $A\cos(\varphi) = -2\ cm$, por lo que:

$$A = 2\ cm; \quad \varphi = \pi\ rad$$

Pregunta A3- Dos hilos indefinidos, paralelos al eje z, están recorridos por una intensidad de corriente *I* = 2 A en los sentidos indicados en la figura. Uno de los hilos (hilo 1) corta al plano *xy* en el punto (0, *a*) y el otro (hilo 2) en el punto (2*a*, 0), siendo *a* = 20 cm. Calcule:
a) El campo magnético creado por ambos hilos en el origen de coordenadas, O(0, 0).
b) La fuerza magnética por unidad de longitud que ejerce el hilo 1 sobre el hilo 2.
Dato: Permeabilidad magnética del vacío, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ T\ m\ A^{-1}$.



a) Empleando la regla de la mano derecha podemos averiguar la dirección y sentido de los campos producidos por los cables 1 y 2:



Así pues, conforme al dibujo de la izquierda, los campos serán:

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot a}\ \vec{\imath}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot 2a}\ \vec{\jmath}$$

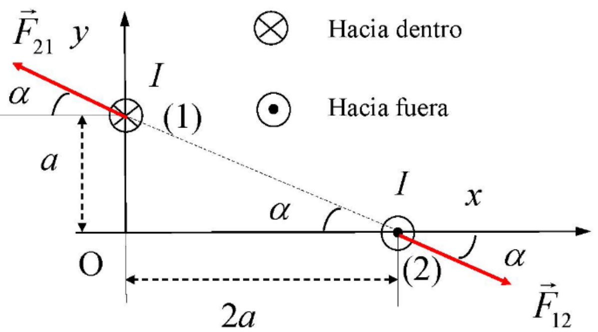
Así que, sustituyendo datos:

$$\vec{B}_1 = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}2}\ \vec{\imath} = -2 \cdot 10^{-6}\,\vec{\imath}\ T$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi \cdot 0{,}4}\ \vec{\jmath} = -10^{-6}\,\vec{\jmath}\ T$$

Y en total:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -10^{-6}(2\vec{\imath} + \vec{\jmath})\ T$$



b) Primero vamos a calcular el campo ejercido por el cable 1 sobre el cable 2 y de ahí hallaremos la fuerza por unidad de longitud. Dado que el campo magnético tiene que ser perpendicular a la línea que une a los dos cables, el campo magnético debe ser:

$$\vec{B}_1 = -B_1(\cos(\beta)\ \vec{\imath} + sen(\beta)\ \vec{\jmath})$$

Donde β es el ángulo complementario al ángulo α del dibujo ($\alpha + \beta = 90°$). Por otro lado, de acuerdo con el Teorema de Pitágoras la distancia r que separa ambos cables será:

$$r^2 = a^2 + (2a)^2 \rightarrow r = \sqrt{5}\,a \rightarrow r = 0{,}45\ m$$

Así pues, como conocemos cuánto miden los tres lados del triángulo de vértices O, (1) y (2), podemos calcular el coseno y el seno de β a partir de las definiciones:

$$\cos(\beta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{1}{\sqrt{5}};\ \ \text{sen}(\beta) = \frac{2a}{r} = \frac{2a}{\sqrt{5}\,a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Por tanto, como el módulo del campo es $B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r}$, juntando todo y sustituyendo datos el campo total resulta:

$$\vec{B}_1 = -\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2}{2\pi\,\sqrt{5} \cdot 0{,}2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\,\vec{\imath} + \frac{2}{\sqrt{5}}\,\vec{\jmath}\right) = -4{,}00 \cdot 10^{-7}(\,\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath})\;T$$

Ahora que ya conocemos el valor del campo la fuerza la podemos calcular mediante $\vec{F}_{12} = I\,(\vec{L} \times \vec{B}_1)$. Como el cable 1 va hacia dentro en la figura $\vec{L} = -L\,\vec{k}$, por lo que la fuerza será:

$$\vec{F}_{12} = I\,(\vec{L} \times \vec{B}_1) = I\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -L \\ -B_x & -B_y & 0 \end{vmatrix} = IL(B_y\,\vec{\imath} - B_x\,\vec{\jmath})$$

Es decir, vemos que la fuerza ejercida por el cable 1 irá hacia abajo y a la derecha, como aparecía en la figura. Así que, finalmente la fuerza por unidad de longitud será:

$$\frac{\vec{F}_{12}}{L} = I(B_y\,\vec{\imath} - B_x\,\vec{\jmath}) \rightarrow \frac{\vec{F}_{12}}{L} = 2 \cdot 4{,}00 \cdot 10^{-7}\,(2\,\vec{\imath} - \vec{\jmath}) = 8 \cdot 10^{-7}\,(2\,\vec{\imath} - \vec{\jmath})\;N/m$$

Pregunta A4- Se sitúa un objeto a la izquierda de una lente convergente, colocado verticalmente sobre el eje óptico. Determine el aumento lateral de la imagen y realice el correspondiente trazado de rayos para la formación de la imagen, si el objeto se sitúa a:
a) Una distancia de un tercio de la distancia focal de la lente.
b) Una distancia de tres veces la distancia focal de la lente.

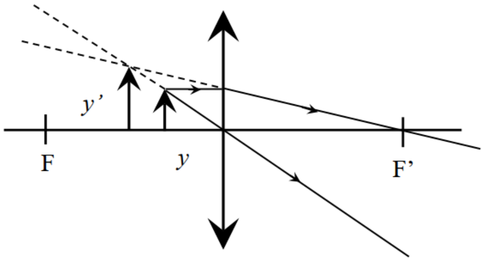
a) De la ecuación de las lentes podemos obtener la distancia imagen s' en función de la distancia objeto s y la focal imagen f':

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}\right)^{-1}$$

Por ello, como en este caso $s = -f'/3$:

$$s' = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{-\frac{f'}{3}}\right)^{-1} = -\frac{1}{2}f'$$

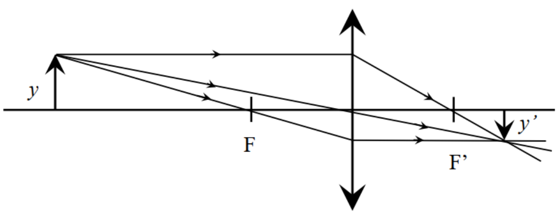
Y el aumento lateral será $M_L = \frac{s'}{s} = \frac{3}{2}$. Es decir, que la imagen será virtual, derecha y 1,5 veces más grande, como se puede apreciar en la figura:



b) Como en este caso $s = -3f'$, la distancia imagen será:

$$s' = \left(\frac{1}{f'} + \frac{1}{-3f'}\right)^{-1} = +\frac{3}{2}f'$$

Por lo que el aumento lateral será $M_L = \frac{s'}{s} = \frac{-1}{2}$. Es decir, que la imagen será real, invertida y 0,5 veces más pequeña, algo que podemos verificar con el trazado de rayos:



Pregunta A5- Al iluminar la superficie de un metal con un haz de luz de 120 nm de longitud de onda se emiten electrones por efecto fotoeléctrico que son frenados por un potencial de 7,2 V. Cuando el mismo metal se ilumina con un haz de luz de frecuencia $1,67 \cdot 10^{15}\ Hz$, el potencial de frenado se reduce hasta los 3,8 V.
a) Determine el valor de la constante de Planck.
b) Halle el trabajo de extracción del metal, en eV, y el valor de su frecuencia umbral para que se produzca efecto fotoeléctrico.
Datos: Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$; Valor absoluto de la carga del electrón, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\ C$.

a) Lo primero es hallar la frecuencia de la luz de $\lambda = 120\ nm = 1,2 \cdot 10^{-7}\ m$:

$$c = \lambda \cdot \nu \rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda} \rightarrow \nu = \frac{3 \cdot 10^8}{1,2 \cdot 10^{-7}} = 2,50 \cdot 10^{15}\ Hz$$

La energía de este fotón se invierte en arrancar un electrón, y lo que sobre, para proporcionarle una velocidad a ese electrón. Por ello, $h \cdot \nu = E_0 + E_c$. Como tenemos el potencial de frenado, podemos hallar las energías cinéticas asociadas a cada fotón:

$$E_c = |qV_{fren}| \rightarrow E_c = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 7,2 = 1,15 \cdot 10^{-18}\ J$$
$$E_c' = |qV_{fren}'| \rightarrow E_c = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 3,8 = 6,08 \cdot 10^{-19}\ J$$

Por consiguiente, para hallar la constante de Planck podemos resolver el siguiente sistema de ecuaciones, cuyas incógnitas son h y E_0, la energía umbral:

$$\begin{cases} h \cdot \nu = E_0 + E_c \\ h \cdot \nu' = E_0 + E_c' \end{cases}$$

Restando la primera y la segunda ecuación $h(\nu - \nu') = E_c - E_c'$, por lo que la constante de Planck será:

$$h = \frac{E_c - E_c'}{\nu - \nu'} \rightarrow h = \frac{1,15 \cdot 10^{-18} - 6,08 \cdot 10^{-19}}{2,50 \cdot 10^{15} - 1,67 \cdot 10^{15}} = 6,55 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$$

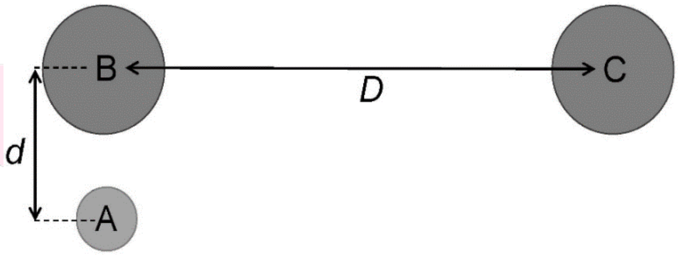
b) Para hallar el trabajo de extracción podemos despejar E_0 de cualquiera de las dos ecuaciones del sistema del apartado a. Por ejemplo, con la primera:

$$E_0 = h\nu - E_c \rightarrow E_0 = 6{,}65 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}50 \cdot 10^{15} - 1{,}15 \cdot 10^{-18} = 4{,}87 \cdot 10^{-19}\, J = 3{,}04\, eV$$

A su vez, esto nos permite hallar la frecuencia umbral ν_0, pues $E_0 = h\nu_0 \rightarrow \nu_0 = E_0/h$:

$$\nu_0 = \frac{4{,}87 \cdot 10^{-19}}{6{,}55 \cdot 10^{-34}} = 7{,}44 \cdot 10^{14}\, Hz$$

Pregunta B1- En un experimento similar al efectuado por Henry Cavendish en 1798 para determinar la constante de gravitación universal, una pequeña esfera, A, de masa *m* queda situada ante dos esferas, B y C, ambas de la misma masa *M*, de tal modo que los centros de las tres esferas corresponden a los vértices de un triángulo rectángulo de catetos *D* y *d*, como se ilustra en la figura.



a) ¿Qué relación debe existir entre *D* y *d* para que la fuerza de atracción gravitatoria de la esfera C sobre la esfera A sea la décima parte de la atracción de la esfera B sobre A?
b) Si el valor de *M* es de 10 kg y se encuentra que la atracción de B sobre A es la milmillonésima parte del peso de A en la superficie terrestre, ¿cuánto vale la distancia *d*?
Datos: Masa de la Tierra, $M_T = 5{,}97 \cdot 10^{24}\, kg$; Radio de la Tierra, $R_T = 6{,}37 \cdot 10^{6}\, m$.

a) Si la fuerza de C sobre A es una décima parte de la de B sobre A, $F_c = \frac{1}{10} \cdot F_B$ y, por ende:

$$\frac{GMm}{D^2 + d^2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{GMm}{d^2} \rightarrow D^2 + d^2 = 10d^2 \rightarrow D^2 = 9d^2 \rightarrow D = 3d$$

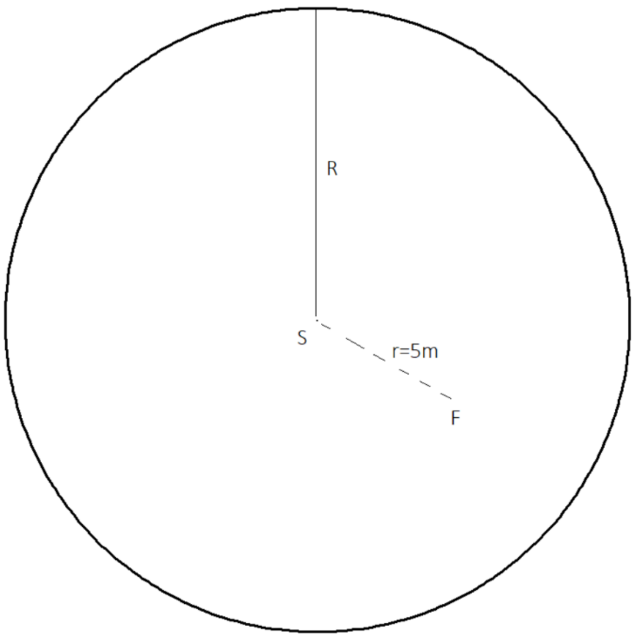
Es decir, la distancia D debería ser el triple de la distancia d.

b) Una milmillonésima parte es un factor 10^{-9} más pequeño que la relación original. Por ello, si la fuerza de B sobre A es una milmillonésima parte de su peso $F_B = 10^{-9}\, P \rightarrow P = 10^{9} \cdot F_B$:

$$\frac{GMm}{R_T^2} = 10^9 \cdot \frac{GMm}{d^2} \to \frac{1}{R_T^2} = \frac{10^9}{d^2} \to d^2 = \frac{R_T^2}{10^9} \to d = \sqrt{\frac{1}{10^9}} \cdot R_T \to d = 0{,}26\ m$$

Pregunta B2- En el centro de una pista de circo circular se ha instalado un sonómetro (instrumento para medir el nivel de intensidad sonora). Solamente una de las filas, de forma circular alrededor de la pista y de centro el centro de la misma, está ocupada por el público asistente al espectáculo. Un faquir está actuando a 5 m del centro de la pista. En un cierto instante, el faquir emite un grito y el sonómetro marca 80 dB. A continuación, una persona del público grita y el sonómetro marca 73,98 dB. Por último, todo el público grita al unísono, marcando el sonómetro 90,97 dB. Si se asume que todos, tanto el faquir como cada espectador, gritan con la misma potencia, calcule:
a) La potencia del grito emitido por el faquir.
b) La distancia a la que se encuentra el público del centro de la pista y el número de personas que asisten al espectáculo.
Dato: Valor umbral de la intensidad acústica, $I_0 = 10^{-12}\ W\ m^{-2}$.

a) La situación que plantea el problema la podemos ver en el siguiente dibujo:



S indica la posición del sonómetro y F la del faquir. R es la distancia del centro al público y r la distancia al faquir. El nivel de intensidad y la intensidad están relacionadas mediante:

$$\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Despejando la intensidad:

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{\beta}{10}}$$

Por ello, si el grito del faquir se registra con 80 dB, la intensidad del sonido ha de ser:

$$I = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{80}{10}} = 10^{-4}\ W\ m^{-2}$$

A su vez como intensidad y potencia están relacionadas mediante $I = P/S$ y suponemos que se trata de una onda esférica:

$$P = I \cdot S = I \cdot 4\pi r^2 \to P = 10^{-4} \cdot 4\pi \cdot 5^2 = \frac{\pi}{100}\ W$$

b) Como las personas gritan con la misma potencia que el faquir, vamos a hallar la intensidad del grito de una persona y de ahí vamos a obtener la distancia a la que se encuentra el público.

$$I_1 = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{73,98}{10}} = 2,50 \cdot 10^{-5}\ W\ m^{-2}$$

$$I_1 = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi R^2} \to R = \sqrt{\frac{P}{4\pi I_1}}$$

$$R = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{100}}{4\pi \cdot 2,50 \cdot 10^{-5}}} = 10,00\ m$$

Por otra parte, si todo el público grita a 90,97 dB, la intensidad de su grito será:

$$I_T = 10^{-12} \cdot 10^{\frac{90,97}{10}} = 1,25 \cdot 10^{-3}\ W\ m^{-2}$$

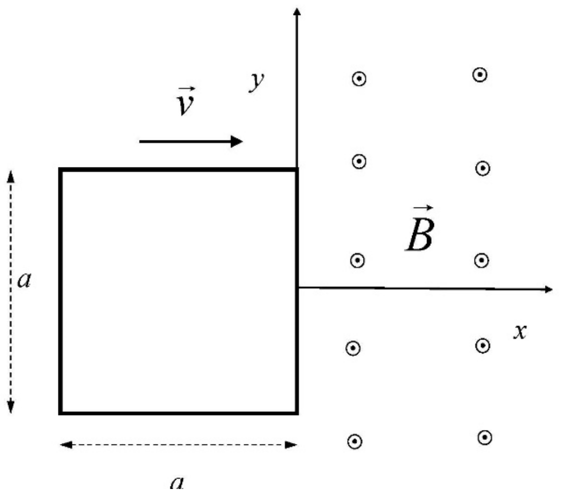
Así pues, el número de espectadores podemos hallarlo dividiendo la intensidad total entre la intensidad de una persona:

$$n = \frac{I_T}{I_1} \to n = 50$$

Pregunta B3- Una espira cuadrada, de lado *a* = 30 cm, penetra con una velocidad constante $\vec{v} = 3\,\vec{\imath}\ cm\ s^{-1}$, en una zona (*x* > 0) en la que hay un campo magnético $\vec{B} = 1 \cdot 10^{-3}\,\vec{k}\ T$. En el instante inicial, la espira está completamente fuera del campo y con uno de sus lados situado en el eje *y* (ver figura).

a) Represente gráficamente la fem inducida en la espira en función del tiempo.

b) Si la resistencia de la espira es de 10 Ω, obtenga el valor máximo de la intensidad que recorre la



espira. Razone cuál será el sentido de la corriente inducida.

a) El flujo magnético es $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\alpha)$. Por ello, puede depender del tiempo si cambia el campo, la superficie o la inclinación entre ambos. En este caso cambia la superficie porque la espira va penetrando en el campo con una velocidad constante de 3 cm/s. Así pues, pasados 10s habrá entrado completamente, porque el lado de la espira mide 30cm. En consecuencia, durante los 10 primeros segundos la superficie cambiará con el tiempo como $S(t) = a \cdot v \cdot t$ y pasados 10s la superficie alcanzará el valor máximo $S = a^2$ porque toda la espira ya está dentro. Por consiguiente, el flujo cambia con el tiempo como:

$$\Phi(t) = B \cdot S(t) \cdot \cos(180°) = B \cdot S(t) = \begin{cases} -B \cdot a \cdot v \cdot t & si\ 0 < t < 10\ s \\ -B \cdot a^2 & si\ \ t \geq 10\ s \end{cases}$$

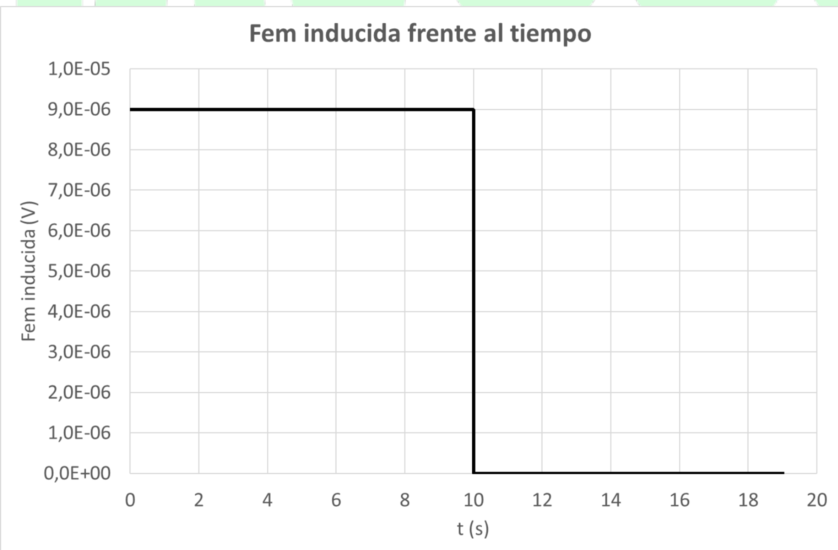
Como $B = 10^{-3}\ T,\ \ a = 30cm = 0{,}3\ m$ y $v = 3\ cm\ s^{-1} = 0{,}03\ m\ s^{-1}$

$$\Phi(t) = \begin{cases} -9 \cdot 10^{-6} \cdot t\ \ Wb & si\ 0 < t < 10\ s \\ -9 \cdot 10^{-5}\ \ Wb & si\ \ t \geq 10\ s \end{cases}$$

Finalmente, como la fem es la derivada del flujo:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi(t) = \begin{cases} 9 \cdot 10^{-6}\ \ V & si\ 0 < t < 10\ s \\ 0\ V & si\ \ t > 10\ s \end{cases}$$

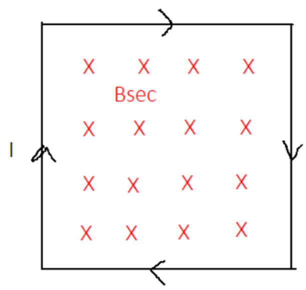
Y gráficamente:



b) De acuerdo con la Ley de Ohm $\varepsilon = I \cdot R$, por lo que la intensidad será:

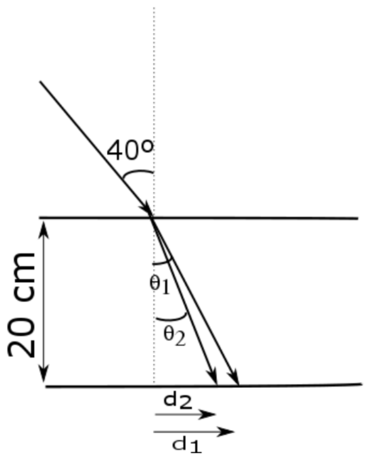
$$I = \frac{\varepsilon}{R} \rightarrow I = \frac{9 \cdot 10^{-6}}{10} = 9 \cdot 10^{-7}\ A$$

Cuando se induce una corriente en la espira, esta corriente a su vez también va a provocar un campo magnético dentro de la espira, que llamaremos $\vec{B}_{sec}$. Este nuevo campo magnético compensará el cambio de flujo original. En este caso, el flujo aumenta porque un campo apuntando en el sentido positivo del eje z está atravesando la espira. Así que $\vec{B}_{sec}$ debe apuntar en el sentido negativo del eje z para compensar este cambio. Y esto será posible si la corriente fluye en sentido horario, en el sentido de las agujas del reloj (ver dibujo)



Pregunta B4- Un haz de luz compuesto por dos rayos monocromáticos incide desde el aire con un ángulo de incidencia de 40° sobre la superficie superior de un vidrio de 20 cm de espesor. El índice de refracción del vidrio para la primera onda es $n_1 = 1,61$, mientras que para la segunda onda es $n_2 = 1,67$.
a) Calcule la distancia entre los dos rayos a la salida del vidrio por su cara inferior.
b) Si la frecuencia de la luz del primer rayo es $4,21 \cdot 10^{14}\ Hz$, obtenga su longitud de onda en el interior del vidrio.
Datos: Índice de refracción del aire, $n_{aire} = 1$; Velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$.

a) Como los índices de refracción son distintos para las dos ondas, las dos ondas se refractarán con un ángulo distinto (ver dibujo). Por ello, el primer rayo se habrá desplazado una distancia d_1 hacia la derecha mientras que el segundo rayo se habrá desplazado una distancia d_2. Entonces, la distancia entre rayos será $\Delta d = d_1 - d_2$.



Para hallar esta distancia vamos a hacer tres pasos. Primero calcularemos los ángulos θ_1 y θ_2 mediante la ley de Snell-

Descartes. A continuación, hallaremos las distancias d_1 y d_2 por trigonometría y finalmente las restaremos para ver la distancia Δd entre rayos.

En primer lugar, conforme a la Ley de Snell-Descartes $n \cdot sen(\alpha) = n' \cdot sen(\beta)$, por lo que despejando β obtendremos el ángulo refractado en función del resto de parámetros:

$$\beta = arcsen\left(\frac{n \cdot sen(\alpha)}{n'}\right)$$

Por ello, los rayos refractados θ_1 y θ_2 serán:

Rayo 1: $\theta_1 = arcsen\left(\frac{n_{aire} \cdot sen(40°)}{n_1}\right) = arcsen\left(\frac{1 \cdot sen(40°)}{1{,}61}\right) = 23{,}53°$

Rayo 2: $\theta_2 = arcsen\left(\frac{n_{aire} \cdot sen(40°)}{n_2}\right) = arcsen\left(\frac{1 \cdot sen(40°)}{1{,}67}\right) = 22{,}64°$

Llamando L = 20 cm al espesor, de acuerdo con la figura podemos relacionar las distancias d_1 y d_2 con las tangentes de los ángulos θ_1 y θ_2 :

$$\tan(\theta_1) = \frac{d_1}{L} \to d_1 = L \cdot \tan(\theta_1) \to d_1 = 20 \cdot \tan(23{,}53°) = 8{,}71\ cm$$

$$\tan(\theta_2) = \frac{d_2}{L} \to d_2 = L \cdot \tan(\theta_2) \to d_2 = 20 \cdot \tan(22{,}64°) = 8{,}34\ cm$$

Por tanto, la separación entre rayos es:

$$\Delta d = d_1 - d_2 \to \Delta d = 8{,}71 cm - 8{,}34\ cm = 0{,}37\ cm$$

b) Como el índice de refracción es $n = \frac{c}{v}$, entonces $v_1 = \frac{c}{n_1}$, por lo que la primera onda se propaga a una velocidad de:

$$v_1 = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}61} = 1{,}86 \cdot 10^8\ m/s$$

Así pues, como $v_1 = \lambda \cdot v \to \lambda = v_1/v$, por lo que la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{1{,}86 \cdot 10^8 \ m/s}{4{,}21 \cdot 10^{14} \ Hz} = 4{,}42 \cdot 10^{-7} \ m$$

Pregunta B5- Un trozo de madera con 25 g de carbono procedente de la rama de un árbol fue tallado para fabricar la empuñadura de un cuchillo de sílex. Esta empuñadura se encontró posteriormente en las ruinas de una ciudad antigua mostrando una actividad en ^{14}C de 5,2 Bq. Sabiendo que, en los organismos vivos, hay $\mathbf{1{,}3 \cdot 10^{-12}}$ átomos de ^{14}C por cada átomo de ^{12}C y que el periodo de semidesintegración del ^{14}C es de 5730 años:
a) Determine la actividad que tenía el trozo de madera cuando la rama fue cortada.
b) Calcule hace cuanto tiempo fue cortada la rama.
Dato: Masa atómica del C, $M_C = 12 \ u$; Número de Avogadro, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23} \ mol^{-1}$.

a) Como la actividad es $A(t) = -dN/dt$ y $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, entonces $A(t) = +\lambda \, N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ y la actividad inicial será $A_0 = \lambda \cdot N_0$. Por ello, para hallar la actividad que tenía la madera cuando fue cortada necesitamos encontrar λ y el número inicial de átomos N_0.

En primer lugar, podemos hallar λ con el periodo de semidesintegración $T_{1/2} = 5730 \ años = 1{,}81 \cdot 10^{11} \ s$:

$$\lambda = \frac{\ln(2)}{T_{1/2}} \rightarrow \lambda = \frac{\ln(2)}{1{,}81 \cdot 10^{11} \ s} = 3{,}83 \cdot 10^{-12} \ s^{-1}$$

Por otro lado, como la masa atómica del carbono es 12u, eso significa que en un mol habrá 12g de C. Por ello, como tenemos 25g de carbono, tenemos 25/12 moles de carbono. Así pues, multiplicando esta cantidad por el número de Avogadro y por la proporción de átomos de ^{14}C, vemos que el número inicial de átomos de ^{14}C era:

$$N_0 = \frac{25}{12} mol \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} mol^{-1} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-12} = 1{,}63 \cdot 10^{12} \ \text{átomos de } ^{14}\text{C}$$

Por tanto, la actividad inicial era:

$$A_0 = \lambda \cdot N_0 \rightarrow A_0 = 3{,}83 \cdot 10^{-12} \ s^{-1} \cdot 1{,}63 \cdot 10^{12} = 6{,}24 \ Bq$$

b) Como tenemos la actividad hoy podemos hallar el tiempo transcurrido despejándolo de la fórmula de la actividad:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \rightarrow \frac{A(t)}{A_0} = e^{-\lambda t} \rightarrow \ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right) = -\lambda \cdot t \rightarrow t = \frac{\ln\left(\frac{A(t)}{A_0}\right)}{-\lambda}$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{5{,}2}{6{,}24}\right)}{-3{,}83 \cdot 10^{-12}\ s^{-1}} = 4{,}76 \cdot 10^{10} s \approx 1500\ años$$