Modelo A

Conteste a un máximo de 10 cuestiones.

1 Para todo par A, B de matrices reales n x n arbitrarias:

(A) Se cumple que $(A+B)^2=A^2+B^2$.

(B) Se cumple que $A^2-B^2= (A+B)(A-B)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

2 Para toda A matriz real 2 x 2 arbitraria, se cumple que:

(A) Si $A^2=A$, entonces $A^4=A$.

(B) Si A es simétrica, entonces $A^2=A$.

(C) Ninguna de las otras dos.

3 Toda A matriz real arbitraria cumple:

(A) El rango de A es el número de filas no nulas.

(B) rango(A)=rango(-A).

(C) Ninguna de las anteriores.

4 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$:

(A) Tiene rango(A)=1 para ciertos valores de α.

(B) Tiene rango(A)=2 para todos los valores de α.

(C) Ninguna de las otras dos.

5 Consideremos los planos π: $2x+y+z=1$, π': $x+y-z=0$.

(A) Su intersección es la recta $3x=2y=1$.

(B) Su intersección es la recta *r*: (-1,2,1)+λ(-2,3,1).

(C) Ninguna de las otras dos.

6 Para todo par de vectores ortogonales u, v, si α es el ángulo que forman u y u - v, entonces se cumple que:

(A)

$$\cos\alpha = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2}$$

(B) $$\cos^2\alpha = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2}$$

(C) Ninguna de las otras dos.

7 La recta en el espacio cuya ecuación es

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$$

(A) Pasa por el punto (3,1,0) y tiene vector director (-2,3,-1).

(B) Pasa por el punto (-2,3,-1) y tiene vector director (-3,-1,1).

(C) Ninguna de las otras dos.

8 La distancia del punto P= (2,4,1) a la recta

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{1}$$

es:

(A) Menor que 1.

(B) Mayor que 1.

(C) Ninguna de las otras dos.

9 Consideremos la curva definida por y=f(*x*). Entonces:

(A) Si la pendiente no está definida en algún punto de la curva, no existe la tangente en dicho punto.

(B) Si la tangente a la curva es horizontal en un punto (a, f(a)) y *f* es derivable en a, entonces f'(a)=0.

(C) Ninguna de las otras dos.

10 Para que el área de la región limitada por la curva *y*=-x²+ax (donde a>0) y el eje *Ox* tenga un valor de 36 unidades, debe ser:

(A) a= 6.

(B) a= 3√3

(C) Ninguna de las otras dos.

11 La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(A) Tiene un máximo relativo x=0.

(B) Tiene un mínimo relativo en *x*=0.

(C) Ninguna de las otras dos

12 El valor de la integral

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^{2022} \operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\cos x}\right) \mathrm{d}x$$

es:

(A) Menor que 1.

(B) Múltiplo de π.

(C) Ninguna de las otras dos.

13 Se tiene un conjunto de bolas azules y bolas rojas en una bolsa. En total hay 25 bolas. Se saca una de ellas al azar y se sabe que la probabilidad de que sea roja es *p*, mientras que la probabilidad de que sea azul es 4p. ¿Cuántas bolas azules hay en la bolsa?

(A) Menos de 21 y más de 15.

(B) Entre 5 y 10.

(C) Ninguna de las otras dos.

14 Se lanza una moneda trucada. La probabilidad de que en dos lanzamientos se obtengan dos caras es 0,16. ¿Cuál es la probabilidad *p* de obtener dos cruces?

(A) $0{,}8 < p < 0.9$

(B) $0{,}3<p<0{,}4$.

(C) Ninguna de las otras dos.

15 ¿Cuáles de las siguientes probabilidades pueden representar a dos eventos disjuntos A y B de un determinado espacio muestral?

(A) $p(A)=0{,}2$ y $p(B)=0{,}67$.

(B) $p(A)=0{,}5$ y $p(B)=0{,}75$.

(C) Ninguna de las otras dos.

PREGUNTAS TIPO DESARROLLO

Elija una sola opción y conteste a los problemas en hojas separadas.

Opción 1:

1 Sea la matriz C=A^2 – 4A - 6*B* donde A = $\begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$ **y B=** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Estudie el rango de C en función del valor del número real *a*.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$$

$$4A = 4 \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}$$

$$6B = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = A^2 - 4A - 6B = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \end{pmatrix}$$

Para hallar el rango de la matriz, se usará el método de Gauss. Si a la tercera fila de la matriz le restamos la primera fila. La matriz queda:

$$C = \begin{pmatrix} 2a^2 - 4a - 6 & 0 & 2a^2 - 4a - 6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El máximo rango que puede tener la matriz es 2.
Si la primera fila de la matriz estuviese llena de ceros, entonces el rango sería 1. ¿Cómo hallamos el valor de a para que esto ocurra? Resolviendo la siguiente ecuación:

$$2a^2 - 4a - 6 = 0$$

De esta ecuación se obtiene: a=3 y a=-1. Entonces:

- Si a=3 ó a=-1, el rango de C es 1
- Si a≠3 ó a≠-1, el rango de C es 2

2 Dada la función

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

a) (0,25 puntos) Estudiar su dominio.

b) (0,75 puntos) Determinar sus asíntotas.

e) (0,75 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) (0,75 puntos) Calcular sus extremos relativos y dar un esbozo de su gráfica.

a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

b) Asíntotas verticales: x=-2, x=-2

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x}{x^2 - 4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = 0$$

Asíntota horizontal en y =0

Asíntotas oblicuas: No hay

c) Para hallar los intervalos de crecimiento, se hallan primero los extremos relativos

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = 0 \ \rightarrow \text{No tiene solución real}$$

No tiene extremos relativos.
Se pasa a estudiar los intervalos entre las asíntotas verticales.

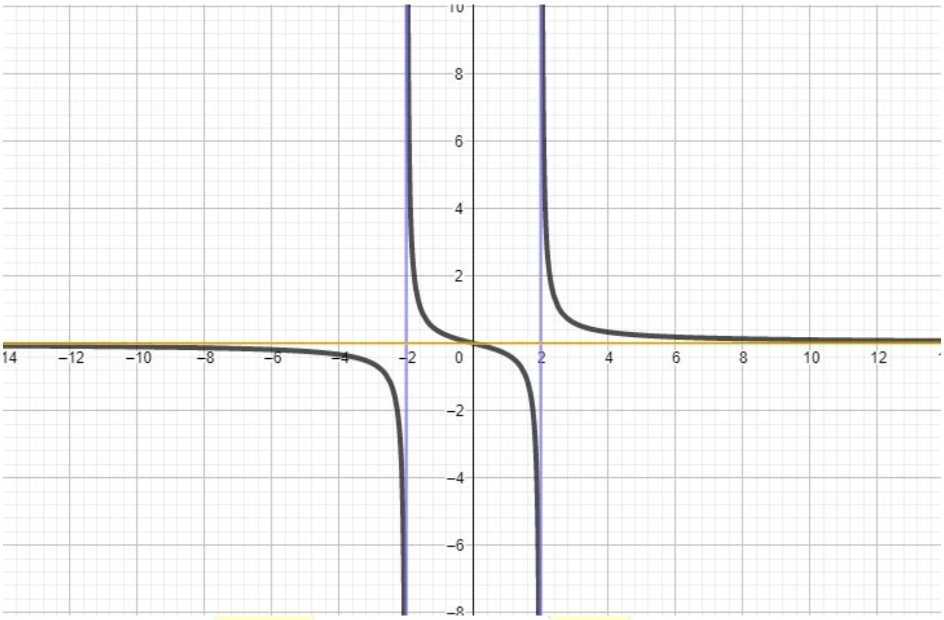
(-∞, -2)	(-2, 2)	(2, ∞)
$f'(-3) < 0 \rightarrow$ Decrece	$f'(0) < 0 \rightarrow$ Decrece	$f'(3) < 0 \rightarrow$ Decrece

Por tanto, f(x) es decreciente en $\mathbb{R}$

d) No hay extremos relativos, como ya se ha indicado en el apartado anterior.
Para dibujar una función resulta conveniente hallar los puntos de corte de la función con los ejes:

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \ \rightarrow (0,0)$$
$$y = 0 \ \rightarrow \text{Asíntota horizontal}$$

Teniendo en cuneta toda la información obtenida del ejercicio, la función tiene la siguiente forma:



Opción 2:

3 Hallar las integrales indefinidas siguientes:

a) (1 punto) $\int xe^{x^2}\,dx$

$$\int x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$$

b) (1,5 puntos) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Se hace un cambio de variable donde:

$$x = \sin t \to t = \arcsin x$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \to dx = \cos t \, dt$$

Entonces, la integral queda:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\int 2\cos 2t\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t$$
$$= \frac{2\arcsin x + \sin(2\arcsin x)}{4} + C$$

4 Se elige un número entero al azar entre 0 y 9999 (ambos incluidos). ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor que 4444 y múltiplo de 5?

Dado que se tiene el conjunto de números que van del 0 al 9999, en total hay 10000 elementos en el espacio muestral. El conjunto de números que es mayor de 4444 lo podemos obtener restando:

$$9999 - 4444 = 5555$$

De estos, el subconjunto que es múltiplo de 5 se puede obtener dividiendo este valor entre cinco:

$$\frac{5555}{5} = 1111$$

Esto coincide con el número de casos favorables a este problema. De modo que la probabilidad pedida es:

$$\mathrm{P}\left(4444 \le \mathrm{x} \le 9999 \cap \frac{\mathrm{x}}{5}\right) = \frac{1111}{10000} \approx 0{,}11 \quad \text{o bien } 11{,}11\%$$